Leçon 213 - Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.

On se place dans E un K-espace vectoriel avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Généralités sur les espaces de Hilbert. —

1. Espaces préhilbertiens et de Hilbert, exemples.—

- Def : Produit scalaire : forme sesqui-linéaire sur H hermitienne, définie positive.
- Def : Espace préhilbertien : espace vectoriel muni d'un produit scalaire
- Ex : Sur $\mathbb{R}^n$, pour $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$, $< X, Y >:= X^t.A.Y$ est un produit scalaire.
- Ex : Sur $\mathbb{C}^n$, $< X, Y >:= X^t\overline{Y} = \sum_i x_i\overline{y_i}$ est un produit scalaire.
- Pro : Pour $(X, \mathbb{A}, \mu)$ espace mesuré, $L^2(X) := \mathscr{L}^2(X, \mathbb{C})/N$ est préhilbertien pour $< f, g >:= \int_X f(x)\overline{g(x)}d\mu(x)$.
- Si $X = \mathbb{N}$ et μ est la mesure de comptage, $l^(\mathbb{N}) := L^2(\mathbb{N})$ a pour produit scalaire : $< u, v >:= \sum_n u_n\overline{v_n}$.
- $(C([0, 1], \mathbb{K}), < ., . >_{L^2})$ est préhilbertien.
- Pro : Le produit scalaire induit une norme sur l'espace vectoriel. $N(x) = \sqrt{< x, x >}$.
- Pro : On a : $N^2(x + y) - N^2(x) - N^2(y) = Re(< x, y >)$ et $N^2(x + iy) - N^2(x) - N^2(iy) = Im(< x, y >)$.
- Pro : Identité du parallélogramme : $N^2(x + y) + N^2(x - y) = 2(N^2(x) + N^2(y))$
- Thm : Une norme provient d'un produit scalaire ssi elle vérifie l'identité du parallélogramme.
- Thm : Inégalité de Cauchy-Schwarz : $| < x, y > | \leq N(x)N(y)$ avec égalité ssi $(x, y) est \mathbb{R} - liée.$
- App : Ainsi, pour $\Phi_y(x) :=< x, y >$, $\|\Phi_y\| = N(y)$. L'application $y \in E \mapsto \Phi_y \in E'$ est donc une isométrie.
- Def : E est un espace de Hilbert ssi il est préhilbertien et complet pour la norme engendrée par son produit scalaire.
- Ex : $\mathbb{R}^n$ avec $< X, Y >:= X^t.A.Y$, $L^2(X)$, $l^2(\mathbb{N})$ sont des espaces de Hilbert.
- Contre-Ex : $(C([0, 1], \mathbb{K}), < ., . >_{L^2})$ n'est pas un espace de Hilbert car $x \mapsto x^n$ est de Cauchy mais ne converge pas dans $C([0, 1], \mathbb{K})$.
- Contre-ex : $\mathbb{R}[X]$ muni de $N(P) := \sup_{[0,1]} |P(x)|$ est préhilbertien non Hilbert.

2. Orthogonalité, familles orthogonales.—

- Def : Orthogonalité $x \perp y \Leftrightarrow < x, y >= 0$.
- Def : Pour $A \subset E$, $A^\perp$. C'est un sous-ev de E.
- Pro : $A^\perp = (Vect(A))^\perp = (\overline{Vect(A)})^\perp$, et est toujours fermé.
- Pro : $A \subset (A^\perp)^\perp$. On a $B \subset A \Leftrightarrow A^\perp \subset B^\perp$.
- Pro : $\overline{Vect(A)} \cap A^\perp = \{0\}$
- Pro : Formule de Pythagore : Pour $x \perp y$, $N(x)^2 + N(y)^2 = N(x + y)^2$.
- Def : Famille orthogonale : Une famille dont tous les éléments sont orthogonaux 2 à 2.
- Def : Famile orthonormée : Les éléments sont orthogonaux 2 à 2 et de norme 1.
- Pro : Une famille orthogonale est libre.
- Ex : La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est orthonormée pour $< X, Y >= \sum_i x_i\overline{y_i}$.
- **Dev** : Théorème de Grothendieck : Soit $(X, \mathbb{A}, \mu)$ un espace probabilisé et F un sous-espace vectoriel de $L^\infty(X)$ fermé pour $\|.\|_p$ pour un $1 \leq p < +\infty$.
  Alors F est de dimension finie.

3. Projection sur un convexe fermé. —

- Théorème de projection sur un convexe fermé : Soit C un convexe fermé. Alors pour tout $x \in E$ il existe un unique $p(x) \in C$ tel que pour tout $y \in C$ on ait : $< x - y, p(x) - y >\leq 0$.
- Pro : On a aussi $\|x - p(x)\| = d(x, C)$.
- Pro : On a $|p(x) - p(y)| \leq |x - y|$. L'application de projection est 1-Lipschitzienne, donc continue sur E.
- Pro : Si C est un s-ev fermé, alors p est linéaire, donc linéaire continue.
- Cor : Pour F un s-ev de E, $E = \overline{F} \oplus F^\perp$.
- Pro : Un espace F est dense dans E ssi $F^\perp = \{0\}$.
- Théorème de Hahn-Banach géométrique.
- Pro : Expression du projeté orthogonal sur un s-ev de dimension finie dont on a une base orthonormée.
- App : Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

4. Théorème de Riesz et conséquences. —

- Théorème de représentation de Riesz : Pour tout F forme linéaire continue sur E, il existe $y \in E$ tel que $\forall x \in E$, $F(x) =< x, y >$.
- Thm : Hahn-Banach anlytique : Pour F un s-ev de E et f une forme linéaire continue sur G pour N, il existe g une forme lin cont sur E qui prolonge f, et telle que $\|f\| = \|g\|$.
- App : Définition de l'adjoint d'une appli lin cont : A^* tq $\forall x, y \in E$, $< Ax, y >=< x, A^*y >$.
- Def : Convergence faible.
- Pro : La limite faible est unique.
- Pro : Convergence forte implique convergence faible.
- Pro : Une suite qui converge faiblement a au plus une valeur d'adhérence. Elle converge ssi elle en a exactement une. Une suite faiblement convergente qui converge en norme vers sa limite faible est convergente.
- Contre-ex : $(e_n)_n$ converge faiblement vers 0 dans $l^2(\mathbb{N})$ mais ne converge pas vers 0.
- Théorème de Banach-Alaoglu : La boule unité dans un Hilbert est faiblement compacte.

2. Bases Hilbertiennes, exemples et applications.—

1. Définitions et exemples. —

- Def : Base hilbertienne.

- Rem : Différence avec les bases algébriques.
- Ex : $(e_n)_n$ est une base hilbertienne sur $l^2(\mathbb{N})$, la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
- Thm : Existence d'une base hilbertienne dénombrable pour un espace de Hilbert séparable.
- Cor : Tous les espaces de Hilbert séparables sont isométriquement isomorphes à $l^2(\mathbb{N})$.
- Cor : Un espace de Hilbert est séparable ssi il possède une base hilbertienne dénombrable.
- App : Pour E Hilbert séparable, décomposition d'un élément dans une base hilbertienne (la suite des coeffs étant dans $l^2(\mathbb{N})$, donc convergence l^2.)

2. *Base hilbertienne de Fourier.* —

- On regarde $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et $L^2(\mathbb{T})$ avec $< f, g >:= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$.
- Def : On définit $e_n(t) := e^{int}$ $\forall n \in \mathbb{Z}$. C'est une famille orthonormée.
- Def : Pour f 2π-périodique et de carré intégrable, on définit $c_n(f) :=< f, e_n >$.
- Def : Définition de D_N,F_N.
- Théorème de Féjer : $F_N * f = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)$ converge uniformément vers f pour tout f $2\pi - périodique$ continue.
  Donc $Vect(e_n)$ est dense dans $L^2(\mathbb{T})$ car $C_c^0(\mathbb{T})$ est dense dans L^2. Donc $(e_n)_n$ base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$.
- Donc pour toute $f \in L^2(\mathbb{T})$, $\|f\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$.
- Ex : Pour f holomorphe sur $\mathbb{D}$, $\forall 0 < r < 1$, $\int_0^1 |f(re^{2i\pi t})|^2 dt = \sum_{n\geq 0} |a_n|^2 r^{2n}$.
- Pour f 2π-périodique, paire, telle que $f(x) = \chi_{[0,\pi/2[} - \chi_{]\pi/2,\pi]}$ sur$[0, \pi]$, la formule de Parseval donne : $\sum_k \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. On en déduit $\sum_k \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
- Pour f 2π-périodique, paire, telle que $f(x) = |x|$ sur $] - \pi, \pi[$, la formule de Parseval nous donne : $\sum_k \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$. On en déduit $\sum_k \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.
- Formule sommatoire de Poisson : Soit f de classe C^1 telle telle que $f(x) = O(\frac{1}{x^2})$ et $f'(x) = O(\frac{1}{x^2})$ pour $|x| \to +\infty$. Alors la fonction $S(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t + n)$ est bien définie, continue, et 1-périodique, et la fonction $f^*(n) = \int_{\mathbb{R}} f(x).e^{-2i\pi nx}dx$ est bien définie, et l'on a :
  $S(t) = \frac{1}{a}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} f^*(n)e^{im2\pi t}$

3. *Polynômes orthogonaux.* —

- Def : On appelle fonction poids une fonction $\rho : I \to \mathbb{R}$ mesurable, strictement positive, telle que $\forall n \int_I |x|^n \rho(x)dq \leq +\infty$.
- Def : On note $L^2(I, \rho)$ l'espace des classes de fonctions de carré intégrable pour la mesure de densité ρ par rapport à la mesue de Lebesgue. Muni de son produit scalaire $\int_I f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx$, c'est un espace de Hilbert contenant les fonctions polynômiales.
- Pro : Il existe une unique famille $(P_n)_n$ de polynômes unitaires orthogonaux deux à deux, vérifiant $\deg(P_n) = n$, que l'on appelle "famille des polynômes orthogonaux associée à ρ". On l'obtient en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la famille $(X^n)_n$.
- Ex : Polynômes de Hermite, de Lagrange, de Chebychev.
- App : Polynômes de meilleure approximation.
- Thm : S'il existe $a > 0$ tq $\int_I e^{a|x|}\rho(x)dx \leq +\infty$, alors $(P_n)_n$ est une base hilbertienne de $L^2(I, \rho)$.

3. Espaces de Hilbert à noyau de reproduction : Les espaces de Hardy et de Bergman. —

- Def : Soit X un ensemble et H un espace de Hilbert de fonctions de $X \to \mathbb{C}$. H est un espace de Hilbert à noyau de reproduction ssi il existe $K : \mathbb{D}\times\mathbb{D} \to \mathbb{C}$ tel que $k_z(.) := \overline{K(z, .)} \in B^2(\mathbb{D})$ $\forall z \in \mathbb{D}$ et tel que $f(z) =< f, k_z >$ $\forall f \in B^2(\mathbb{D})$, $z \in \mathbb{D}$.
- Pro : Un espace de Hilbert de fonctions a un noyau de reproduction ssi les opérateurs d'évaluation $\delta_z : f \mapsto f(z)$ sont continus $\forall z \in X$.
- Théorème : Le noyau de reproduction caractérise l'espace de Hilbert : Si on se donne un noyau de reproduction K, alors il existe un unique $(H, \|.\|)$ hilbert de fonctions $X \to \mathbb{C}$ dont K est le noyau de reproduction.
- **Dev** : L'espace de Bergman $B^2(\mathbb{D}) := \{f \in Hol(\mathbb{D})$ tq$f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{D})\}$ est un espace de Hilbert pour $\|.\|_2$, dont une base orthonormée est la famille des $e_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{n+1}}z^n$.
  $f \in Hol(\mathbb{D})$ est dans $B^2(\mathbb{D})$ ssi pour $f(z) = \sum_n a_n z^n$ on a $(\frac{a_n}{\sqrt{n+1}})_n \in l^2$. On a une condition d'intégrabilité qui ne porte que sur les coeffs du DSE en 0.
  L'espace de Bergman est un espace de Hilbert à noyau de reproduction. Son noyau de reproduction est $K_B(z, w) = \frac{\pi}{(1-z\overline{w})^2}$.
- Rem : Ainsi, on obtient beaucoup de propriétés sur $B^2(\Omega)$ grâce à l'étude de son noyau de reproduction, qui a une forme simple ici.
- Rem : On peut aussi définir $B^p(\mathbb{D})$ pour $1 \leq p < +\infty$ et ramener certaines études sur les B^p à une étude sur B^2 afin de profiter de son caractère hilbertien.
- Pour Ω un ouvert simplement connexe, on peut aussi définir $B^p(\Omega)$ grâce à l'existence de $\psi : \mathbb{D} \to \Omega$ biholomorphismes. Cette définition est indépendante de ψ, et $B^2(\Omega)$ va lui aussi être un espace de Hilbert à noyau de reproduction, avec un noyau de reproduction que l'on obtient à partir de celui de $B^2(\mathbb{D})$. On peut ainsi exporter des propriétés de $B^2(\mathbb{D})$ vers $B^2(\Omega)$.
- Def : On définit $H^2(\mathbb{D}) = \{\sum_n a_n z^n$ tq $(a_n)_n \in l^2(\mathbb{N})\}$ l'espace de Hardy du disque.
- Pro : L'espace de Hardy du disque est un espace de Hilbert pour $< f, g >= \sum_n a_n.\overline{b_n}$.
  On a de plus : $< f, g >= lim_{r\to 1^-}(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})\overline{g(re^{it})}dt)$.
  Une base orthonormée de $H^2(\mathbb{D})$ est $z \mapsto z^n$.
- Pro : C'est lui aussi un espace de Hilbert à noyau de reproduction pour $K_H(z, w) = \frac{1}{1-z\overline{w}}$.

- Pro : On peut injecter $B^2(\mathbb{D})$ et $H^2(\mathbb{D})$ dans $L^2(\mathbb{D})$. Pour P_B et P_H les projecteurs orthogonaux de $L^2(\mathbb{D})$ sur $B^2(\mathbb{D})$ et $H^2(\mathbb{D})$, on a : $P_B(f)(z) =< f, \overline{K_B(z,.)} >$ et $P_H(f)(z) =< f, \overline{K_H(z,.)} >, \forall f \in L^2(\mathbb{D}), \forall z \in \mathbb{D}$.
- Thm : Dans un espace de Hilbert de fonctions à noyau de reproduction, si un opérateur de composition $C_\varphi : f \mapsto f \circ \varphi$ est bien défini, alors il est continu.
- Thm : Pour tout $g : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorphe, $\forall f \in B^2(\mathbb{D})$, $f \circ g \in B^2(\mathbb{D})$. Idem pour $H^2(\mathbb{D})$.

Références

Hirsch-Lacombe : I).II)1),II)2),II)3)
Objectif Agrégation : Contre-ex à $F \oplus F^\perp$, polynômes de meilleure approximation. Coefficients de Fourier. Polynômes orthogonaux.
Zavidovique : Théorème de Grothendieck. (Dev)
Bayen, Margaria : Espace de Bergman. (Dev)
Gourdon : Séries de Fourier.
Candelpergher : Equation de la chaleur sur le cercle.

June 10, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes